جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
بیست و دومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۰

سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
تعداد سوالات		
۳۵	-	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۵ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

- سؤال‌های **بیست و دو تا سی و پنج** در پنج دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیحی مربوط به آن‌ها مطرح شده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.

۱- نوید و سعید مشغول بازی "سنگ، کاغذ، قیچی" هستند. در هر دست از این بازی دو نفره، دو بازیکن دستشان را به پشت سرخود برده و سپس دست خود را به یکی از سه شکل سنـگ، کاغذ یا قیچـی به دیگران نشـان می‌دهند. سنگ قیچی را می‌بَرَد و به کاغذ می‌بازد، کاغذ سنگ را می‌برد و به قیچی می‌بازد، و قیچی کاغذ را بُرده و به سنگ می‌بازد. در صورتی که هر دو بازیکن یک شکل یکسان را انتخاب کرده باشند، آن دست مساوی اعلام می‌شود.

الف) ۵۶۰×۳^۷ ب) ۱۶۵×۳^۷ ج) ۲۴۰×۷^۳ د) ۳۸۵×۷^۳ ه) ۳۳۰×۷^۳

۲- علی یک انبار دارد که در آن عدد ذخیره کرده است. این انبار به شکلی است که او تنها می‌تواند اعداد خود را در دو نقطه از آن به صورت دو ستون روی هم قرار داده و ذخیره کند. علی تاکنون اعداد (۷,۳,۵,۱,۲,۶,۴) را در انبار ذخیـره کـرده و آن‌ها را در ستون اول به ترتیب از چپ به راست روی هم قرار داده است؛ یعنی عدد ۷ پایین‌ترین و عدد ۴ بالاترین عدد این ستون شده‌اند. ستون دوم در حال حاضر خالی است.

علی برای جابه جا کردن این اعداد یک دستگاه حمل عدد دارد که در هر بار استفاده از آن می‌تواند تعداد دلخواهی از اعداد بالای یک ستون را برداشته و با همان ترتیب به بالای ستون دیگر انتقال دهد. برای مثال علی اگر بخواهد با این دستگاه ۳ عدد از ستون اول را به ستون دوم انتقال دهد، اعداد ستون اول به ترتیب (۷,۳,۵,۱) و اعداد ستون دوم به ترتیب (۲,۶,۴) خواهند شد.

حداقل چند مرحله لازم است تا علی بتواند از وضعیت اولیه‌ی داده شده به وضعیتی برسد که همه‌ی اعداد در یکی از دو ستون به ترتیب صعودی از پایین به بالا قرار گرفته باشند؟

الف) ۱۰ ب) ۹ ج) ۷ د) ۸ ه) ۶

۳- یک دنباله‌ی ۷ عنصری از اعداد ۱ و ۱- را "موفق" می‌گوییم اگر نتوان هیچ زیر دنباله‌ای از عناصر متوالی آن (شامل حداقل دو عنصر) را یافت که مجموع اعداد آن زیردنباله منفی بشود. به عنوان مثال دنباله‌ی (۱,۱-,۱,۱,۱,۱-,۱) موفق است ولی دنباله‌ی (۱,۱-,۱,۱-,۱,۱,۱) موفق نیست چرا که زیردنباله‌ی شامل عناصر دوم تا چهارم (از سمت چپ) در آن مجموعی برابر با ۱- دارد که منفی است.

تعداد دنباله‌های ۷ عنصره‌ی موفق چند تاست؟

الف) ۱۹ ب) ۱۳ ج) ۲۴ د) ۲۱ ه) ۱۶

۴- مجید در خانه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ یک جدول ۶ × ۶ قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی پایین و سمت راست جدول برود. در هر گام او می‌تواند به یکی از سه خانه‌ی پایینی، سمت راستی و یا سمت چپی خودش (در صورت وجـود) برود. دقت کنیـد که مجیـد مجاز نیست یک خانه را دوبار ببیند و الزامی هم ندارد که کوتاه‌ترین مسیر را طی کند.

با رعایت قوانین فوق، مجید به چند طریق می‌تواند به مقصدش برسد؟

الف) ۲۵۲ ب) ۱۵۶۲۵ ج) ۴۶۶۵۶ د) ۱۲۹۶ ه) ۷۷۷۶

۵- می‌خواهیم ۱۳ نوع ماده‌ی شیمیایی با شماره‌های ۱ تا ۱۳ را با کامیون‌های ویژه‌ای از شیراز به تهران حمل کنیم. حجم همه‌ی ۱۳ ماده شیمیایی روی هم از ظرفیت یک کامیون کمتر است. اما بعضی از آن‌ها را نمی‌توانیم با هم در یک کامیون قرار دهیم.

با تحقیق‌های انجام شده متوجه شده‌ایم اگر باقیمانده‌ی حاصل ضرب شماره‌ی دو ماده‌ی شیمیایی بر ۳ مساوی ۱ شود، آن دو ماده نمی‌توانند همزمان در یک کامیون قرار بگیرند. مثلاً ماده‌ی شماره‌ی ۲ و ۵ نمی‌توانند با یک کامیون حمل شوند، چرا که باقیمانده‌ی تقسیم ۱۰ بر ۳ برابر ۱ است و بنابراین به دو کامیون جداگانه برای حمل این دو ماده نیاز است. اما به فرض ماده‌های ۳ و ۶ و ۸ می‌توانند همگی در یک کامیون قرار بگیرند.حداقل تعداد کامیون‌های لازم برای انتقال این ۱۳ نوع ماده‌ی شیمیایی چقدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۳ ه) ۲

۶- اعداد ۱ تا ۳۲ روی تخته نوشته شده‌اند. در هر مرحله می‌توانیم دو عدد ناصفر a و b را از روی تخته پاک کنیم و به جای آن‌ها اعداد $|a-b|$ و $|a-b-۳۲|$ را بنویسیم. با تکرار این مراحل حداکثر به چند عدد صفر می‌توانیم برسیم؟

الف) ۳۲ ب) ۳۰ ج) ۱۶ د) ۳۱ ه) ۸

۷- ۵ گزاره در زیر آمده است. حداکثر چند تا از آنها می‌توانند با هم درست باشند؟

الف) اگر ب درست باشد آنگاه این گزاره غلط است.
ب) اگر تعداد گزاره‌های درست بیش‌تر از ۲ باشد یکی از آنها پ است.
پ) حداقل یکی از الف و ت غلط است.
ت) ب و پ یا هر دو درست اند یا هر دو غلط.
ث) ب یا درست است یا غلط.

الف) ۳ ب) ۱ ج) ۴ د) ۲ ه) ۰

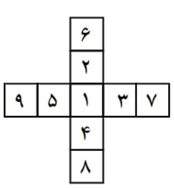
۸- دستگاه برش "الوار بُر" ابزاری برای برش الوارهای چوبی است. این دستگاه به عنوان ورودی تعدادی الوار هم‌اندازه‌ی n × ۱ و یک عدد k (کوچکتر از n و بزرگتر از صفر) را می‌گیرد. سپس به طور همزمان و با یک برش عظیم هرکدام از الوارها را به دو تکه با اندازه‌های k × ۱ و $(n-k)$ ×۱ تبدیل می‌کند. برای مثال می‌توانیم به این دستگاه سه الوار ۵ × ۱ بدهیم تا در یک حرکت آن‌ها را به سه تکه‌ی ۱ × ۱ تبدیل می‌کند. برای مثال می‌توانیم به این دستگاه سه الوار ۵ × ۱ بدهیم تا در یک حرکت آن‌ها را به سه تکه‌ی ۱ × ۱ و سه تکه‌ی ۴ × ۱ تبدیل کند.
سهراب یک الوار چوبی ۱۰۰ × ۱ به عنوان کادوی تولد از رستم هدیه گرفته است! او می‌خواهد با کمترین تعداد دفعه استفاده از دستگاه، این الوار طویل را به ۱۰۰ تکه‌ی ۱ × ۱ تبدیل کند. کمترین تعداد دفعه استفاده از دستگاه برای این منظور چند است؟
دقت کنید که همه‌ی الوارهای ورودی به دستگاه در یک مرحله، باید با هم هم‌اندازه باشند.

الف) ۱۰ ب) ۸ ج) ۷ د) ۹ ه) ۹۹

۹- اشکان ۱۶ مهره در خانه‌ی بالا سمت چپ یک جدول ۴ × ۴ قرار داده است. او در هر مرحله میتواند یک خانه که بیشتر از یک مهره دارد را انتخاب کرده، ابتدا یکی از مهره‌های آن را نابود کند، سپس از مهره‌های باقی مانده تعـدادی را در همـان خانه مـورد نظر باقـی بگـذارد، تعداد دلخواهی را به خانه سمت راست آن (در صورت وجود) و نهایتاً تعداد دلخواهی را به خانه‌ی پایین آن (درصورت وجود) انتقال دهد.
هدف اشکان این است که با مجموعه‌ای از این حرکت‌ها به وضعیتی برسد که در آن تعداد خانه‌های مهره‌دار بیشینه باشد. این مقدار بیشینه چقدر است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۹

۱۰- دارا و سارا با هم این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا دارا اعداد ۹, ... ,۱,۲ را به ترتیب مقابل در شکل قرار می‌دهد. سپس سارا جای تعداد دلخواهی از این اعداد را با هم عوض می‌کند تا اعداد حسابی بُر بخورد. اکنون دارا باید با تعدادی حرکت مجاز اعداد را به شکل اولیه (شکل مقابل) برگرداند. در هر حرکت مجاز دارا ابتدا بین سطر ۵ خانه‌ای شکل، یا ستون ۵ خانه‌ای شکل یکی را انتخاب کرده و ۵ عدد آن سطر یا ستون را برداشته و به دلخواه خودش دوباره می‌چیند.
در بدترین حالت بُرزدن سارا، دارا پس از چند حرکت می‌تواند تمام اعداد را به شکل اولیه سر جای خودش بگذارد؟



الف) ۴ ب) ۱۰ ج) ۵ د) ۸ ه) ۹

۱۱- یک خانواده که ۱۵ فرزند دارد به یک پیتزا فروشی رفته است.

- ۵ تا از این فرزندان هرکدام با ۳ تکه پیتزای مخصوص یا ۴ تکه پیتزای پپرونی سیر می‌شوند.
- ۵ تای دیگر هرکدام با ۴ تکه پیتزای مخصوص یا ۵ تکه پیتزای پپرونی سیر می‌شوند.
- ۵تای سوم هم هرکدام با ۵ تکه پیتزای مخصوص یا ۶ تکه پپرونی سیر می‌شوند.

اگر هر پیتزای مخصوص (۸ تکه) ۱۰ تومان و هر پیتزای پپرونی (۸ تکه) ۸ تومان باشد، این خانواده چقدر باید برای سیر کردن فرزندانش هزینه کند؟(دقت کنید که نمی‌توان قسمتی از یک پیتزا را جداگانه خرید و همواره می‌توانیم تنها تعدادی پیتزای کامل بخریم.)

الف) ۷۴ تومان　ب) ۷۶ تومان　ج) ۸۰ تومان　د)۷۸ تومان　ه) ۷۲ تومان

۱۲- پدر مسعود به او برنامه‌ی زیر را داده است. مسعود مجاز است به عنوان ورودی به این برنامه دو عدد طبیعی کوچکتر از ۳۲ بدهد.

۱- اعداد a و b را از ورودی دریافت کن.

۲- متغیر i را برابر با ۱ و متغیر s را برابر با ۰ قرار بده.

۳- اگر باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۲ با باقی مانده‌ی تقسیم b بر ۲ متفاوت بود، به s به اندازه i واحد اضافه کن.

۴- i را یک واحد افزایش بده.

۵- a را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ و b را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.

۶- اگر حداقل یکی از a یا b بزرگتر از ۰ بود به خط ۳ برو.

۷- اگر s برابر با ۳ بود به اندازه‌ی حاصل‌ضرب مقادیر اولیه‌ی ورودی a و b به حسام شکلات بده.

۸- پایان

هدف مسعود این است که اعدادی را به عنوان ورودی به این برنامه بدهد که حداکثر تعداد شکلات را بگیرد! برای مثال اگر مسعود اعداد ۲۳ و ۱۹ را به این برنامه بدهد در پایان ۴۳۷ شکلات می‌گیرد. اما اگر اعداد ۱۴ و ۱۷ را به عنوان ورودی به برنامه بدهد هیچ شکلاتی نمی‌گیرد. حداکثر تعداد شکلاتی که مسعود می‌تواند از این برنامه بگیرد چند تا است؟

الف) ۸۱۰　ب) ۹۲۸　ج) ۸۳۷　د) ۸۶۸　ه) ۸۷۰

۱۳- خانواده‌ی آقای محسنی در ساوه زندگی می‌کنند و باغ انار دارند. حسن، پسر کوچک خانواده، می‌خواهد به دیدن دوستش حسین که در اصفهان زندگی می‌کنند برود. آن‌ها قرار می‌گذارند که به محض رسیدن حسن، بازی زیر را انجام دهند:

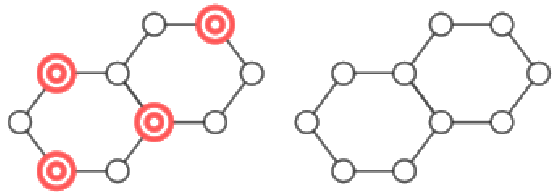
در ابتدا حسین یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از ۱۰ در ذهنش انتخاب می‌کند. سپس در هر مرحله حسن می‌تواند:

- یا یک انار به حسین بدهد و از وی بپرسد که آیا عدد انتخابی‌اش دقیقاً X است یا نه؟ (X را حسن می‌گوید)
- یا سه انار به حسین بدهد و از وی بپرسد که آیا عدد انتخابی‌اش از X (که حسن می‌گوید) کوچکتر است یا نه؟

هروقت حسن یک سؤال نوع اول را بپرسد و حسین جواب "بله" بدهد، حسن برنده می‌شود و حسین به او یک جعبه گز سوغاتی می‌دهد. حسن حداقل چند انار باید با خودش به اصفهان ببرد که مطمئن باشد حتماً و در هر شرایطی می‌تواند به جعبه‌ی گز برسد؟ دقت کنید که حسن پس از شنیدن جواب بله برنده می‌شود و این که عدد حسین را فهمیده باشد کافی نیست.

الف) هفت　ب) شش　ج) پنج　د) نه　ه) هشت

۱۴- گراف شکل زیر از ۱۰ رأس و ۱۱ یال تشکیل شده است. می‌خواهیم روی تعدادی از رأس‌های این گراف خانه بسازیم به شرطی که اولاً هیچ دو خانه‌ای مجاور نباشند (با یک یال مستقیماً به هم متصل نباشند)؛ ثانیاً پس از پایان کار، در هیچ یک از رأس‌های خالی نتوان با رعایت شرط اول خانه‌ی جدیدی ساخت.



به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟ یکی از این روش‌های خانه‌سازی در شکل سمت چپ نمایش داده شده است.

الف) ۱۷ ب) ۲۴ ج) ۱۱ د) ۲۷ ه) ۱۵

۱۵- تمام اعداد ۵ رقمی که بر ۵ بخش‌پذیر نیستند را در نظر بگیرید. اگر تمام این اعداد را در یکدیگر ضرب کنیم و عدد حاصل را X بنامیم، در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم X بر ۵ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۲ د) ۱ ه) ۰

۱۶- محمد ۱۳ قاب چوبی به شکل مربع دارد که حاشیه‌ی هرکدام ۲ سانتی متر عرض دارد. طول ضلع قاب‌های محمد به ترتیب ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۵ و ۲۹ هستند. مثلاً مساحت قاب به ضلع ۱۵ با توجه به حاشیه‌ی داخلی برابر با ۱۲۱ سانتی‌متر مربع است.

محمد می‌خواهد حداقل ۴ تا از این قاب‌ها را برای اسباب‌کشی انتخاب کند. او می‌خواهد این قاب‌ها را طوری انتخاب کند که اولاً همگی درون هم بروند (قاب به ضلع ۲۵ دقیقاً درون قاب به ضلع ۲۹ می‌رود)؛ ثانیاً مساحت‌های فضای خالی درون قاب‌ها که او حمل می‌کند(مساحت درونی خارجی‌ترین قاب منهای مساحت چوب‌های حاشیه‌های قاب‌های داخلی) کمینه بشود! این میزان کمینه کدام است؟

دقت کنید که درون هر قاب (به جز داخلی‌ترین قاب) دقیقاً یک قاب باید مستقیماً برود و هر قاب (به جز خارجی‌ترین قاب) هم می‌بایست به طور مستقیم دقیقاً درون یک قاب دیگر باشد.

الف) ۶۸ ب) ۶۴ ج) ۵۰ د) ۸۹ ه) ۵۷

۱۷- چند دنباله با اعداد غیر تکراری از اعداد ۶ تا ۱۲ وجود دارد که با ۶ شروع شود و به ۱۲ ختم شود و بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دو عدد متوالی دنباله، بزرگ‌تر از ۱ باشد؟

الف) ۶ ب) ۴ ج) ۱۰ د) ۵ ه) ۸

۱۸- به چند طریق می‌توان k مهره از میان n تا مهره‌ای که در یک ردیف چیده شده‌اند انتخاب کرد به طوری که فاصله اولین و آخرین مهره‌ی انتخاب شده حداکثر $k+1$ باشد؟ فرض کنید n و k اعداد صحیح بزرگتر از ۲ هستند و $n \geq k+1$. دقت کنید که فاصله‌ی دو مهره‌ی کنار هم ۱ است.

الف) $1+(n-k)(\frac{k^2+k}{2})-\frac{k^2+k}{2}$

ب) $1+(n-k)(\frac{k^2-k}{2})-\frac{k^2-k}{2}$

ج) $1+(n+k)(\frac{k^2-k}{2})-\frac{k^2-k}{2}$

د) $1+(n-k)(\frac{k^2+k}{2})-\frac{k^2-k}{2}$

ه) $1+(n-k)(\frac{k^2-k}{2})-\frac{k^2+k}{2}$

۱۹- الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم عدد نامنفی x را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و عدد صحیح z را به عنوان خروجی بر می‌گرداند.

منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است. منظور از $x \oplus y$ نیز عمل XOR بیتی بین این دو عدد است که برابر است با حاصل‌جمع تمام 2^iهایی که بیت iام از سمت راست (با شروع از اندیس صفر) در دقیقاً یکی از آن دو عدد، برابر با "یک" باشد. برای مثال XOR هر عددی با صفر خود همان عدد می‌شود و۱۴= ۵ ⊕ ۱۱.

۱- عدد y را برابر با x قرار بده و z را برابر با صفر قرار بده.

۲- x را برابر با $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ قرار بده.

۳- اگر x برابر با صفر نبود y را برابر $x \oplus y$ قرار بده و به خط ۲ برو.

۴- z را برابر با دو برابر z قرار بده.

۵- z را با باقیمانده‌ی y بر ۲ جمع کن.

۶- y را برابر با $\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor$ قرار بده.

۷- اگر y مخالف صفر بود به خط ۴ برو.

۸- z را به عنوان خروجی برگردان.

به ازای چند x کمتر یا مساوی ۱۰۲۳ خروجی این الگوریتم برابر با صفر است؟

الف) ۱۰۲۴ ب) ۳۲ ج) ۵۱۲ د) ۶۴ ه) ۰

۲۰- به چند طریق می‌توان در خانه‌های یک جدول ۵ × ۳ ستاره گذشت طوری که در هر خانه حداکثر یک ستاره قرار بگیرد و در هر سطر و ستون ۱ یا ۲ ستاره قرار بگیرد؟

(راهنمایی: ابتدا سعی کنید حداقل و حداکثر تعداد ستاره‌های که می‌توانیم بگذاریم را بیابید.)

الف) ۲۷۰ ب) ۱۸۰ ج) ۹۰ د) ۱۵۰ ه) ۲۱۰

۲۱- شنگول و منگول و حبه انگور در حال بحث در مورد سؤالات مرحله اول المپیاد هستند:

شنگول: آزمون مرحله اول المپیاد کامپیوتر امسال ۳۵ سؤال پنج گزینه‌ای دارد.

منگول: ۳۵ تا؟!

حبه انگور: این که خیلی زیاد است! می‌دانی نمره‌های دانش آموزان شرکت کننده در این آزمون چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

شما اگر جای شنگول بودید چه جوابی به حبه انگور می‌دادید؟ دقت کنید که هر پاسخ صحیح ۱ نمره، هر پاسخ نزده صفر نمره و هر پاسخ نادرست ۰/۲۵ − نمره دارد.

الف) ۱۷۱ ب) ۱۷۲ ج) ۱۷۰ د) ۱۶۹ ه) ۱۷۳

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱- مقدار x را برابر با عدد A قرار بده.

۲- مقدار y را برابر با صفر قرار بده.

۳- تا وقتی که x بزرگتر از صفر است عملیات زیر را انجام بده:

۳-۱- B را برابر با باقیمانده‌ی تقسیم x بر ۱۰ در نظر بگیر.

۳-۲- y را برابر با مقدار $y \times 10 + B$ قرار بده.

۳-۳- x را برابر با خارج قسمت تقسیم x بر ۱۰ قرار بده.

۴- x را برابر با $y + A$ قرار بده.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۲- فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ را به عنوان A به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن‌ها عدد خروجی بر ۳ بخش‌پذیر است؟

الف) ۱۶۶۶ ب) ۱۰۰۰۰ ج) ۳۳۳۳ د) ۶۶۶۷ ه) ۶۶۶۶

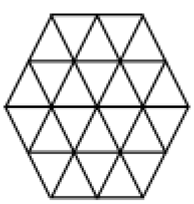
۲۳- فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰ را به عنوان A به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن‌ها عدد خروجی بر ۲ بخش‌پذیر است؟

الف) ۴۰۰۹ ب) ۴۰۰۴ ج) ۲۰۱۲ د) ۵۰۰۴ ه) ۵۰۰۹

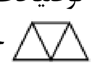
۲۴- فرض کنید اعداد ۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ را به عنوان A به الگوریتم بدهیم. به ازای چند مقدار از آن‌ها عدد خروجی یک عدد اول است؟

الف) ۱۱ ب) ۵۳ ج) ۹۴ د) ۰ ه) ۱۲۲

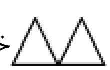
امین می‌خواهد کف اتاق خود را که به شکل شش ضلعی است، کاشی‌کاری کند. پدر امین کف اتاق و کاشی‌ها را مثلث‌بندی کرده و از او می‌خواهد طوری کاشی‌کاری کند که مثلث‌های کاشی‌ها و کف اتاق دقیقاً روی هم قرار بگیرند. امین برای این کار تنها یک نوع کاشی در اختیار خواهد داشت و نمی‌تواند ماشی‌ها را بشکند. شکل مثلث‌بندی شده‌ی روبرو کف اتاق امین را نشان می‌دهد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۵- امین به چند طریق می‌تواند با کاشی‌هایی به شکل  خود را بپوشاند؟

الف) ۳ ب) ۲۱ ج) ۱۲ د) ۹ ه) ۴

۲۶- امین به چند طریق می‌تواند با کاشی‌هایی به شکل  خود را بپوشاند؟

الف) ۱۳۶ ب) ۱۰۰ ج) ۷۸۴ د) ۷۶۸ ه) ۸۵۶

امین، علی، محمد، مصطفی و مهدی در یک اتاق نشسته‌اند. هریک از آن‌ها به طور ثابت به دقیقاً یک نفر دیگر نگاه می‌کنند و البته متوجه می‌شوند که او نیز به چه کسی نگاه می‌کند.

مرتضی وارد اتاق می‌شود و از هریک از آنها دو سوال می‌پرسد:

(آ) در لحظه‌ی ورود من به اتاق چه کسی را می‌دیدی؟

(ب) فردی که به او نگاه می‌کردی، چه کسی را می‌دید؟

او ۱۰ = ۵ × ۲ پاسخ می‌شنود و آنها را در یک جدول ۵ × ۲ به صورت زیر تنظیم می‌کند:

	امین	علی	محمد	مصطفی	مهدی
پاسخ سوال (آ)					
پاسخ سوال (ب)					

با توجه به توضیحات بالا به ۵ سؤال زیر پاسخ دهید (فرض‌های هر سؤال مستقل از سایر سؤال‌ها است):

۲۷- اگر همه افراد پاسخ درستی بدهند جدول مرتضی به چند حالت مختلف ممکن می‌تواند پر شود؟

الف) $۲^{۱۰}$ ب) !۵ ج) $۲۰^{۵}$ د) ۴۴ ه) $۵^{۵}$

۲۸- مرتضی جدولی را که در آن تنها نام دو نفر به چشم بخورد، یک "جدول دونفره" می‌نامد! چند تا از جدول‌های معتبر و ممکن، "دونفره" هستند؟

الف) ۳۲ ب) ۱۰ ج) ۸۰ د) ۸ ه) ۳۲۰

۲۹- فرض کنید مهدی از پاسخ دادن به سؤالات طفره رفته است. با این حال مرتضی با بررسی پاسخ دیگران موفق می‌شود ستون مربوط به پاسخ مهدی را پر کند. چند تا از جدول‌های ممکن مرتضی این ویژگی را دارند که بتوان با خالی بودن پاسخ مهدی، مقدار آن خانه را به طور یکتا استنباط کرد؟

الف) ۹۴۳ ب) ۱۷۵ ج) ۸۱ د) ۳۶۹ ه) ۷۰۰

۳۰- مرتضی جدول معتبری که بتوان با دانستن هر چهار ستون آن جدول، ستون پنجم را به طور دقیق و یکتا استنباط کرد، یک جدول "رؤیائی" می‌نامد. چند تا از جدول‌های ممکن رؤیائی هستند؟

الف) ۲۴ ب) ۱۲۰ ج) ۴۴ د) ۳۲ ه) ۶

۳۱- فرض کنید یکی از این پنج نفر به حداقل یک سوال، پاسخ اشتباه داده است ولی بقیه راست‌گو هستند. مرتضی می‌خواهد از روی پاسخها فرد دروغ‌گو را پیدا کند. می‌دانیم پاسخ‌های امین به این صورت است:

(آ) علی را می‌دیدم.

(ب) علی محمد را می‌دید.

چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟

- اگر امین دروغ‌گو باشد مرتضی او را پیدا می‌کند.
- اگر علی دروغ‌گو باشد مرتضی او را پیدا می‌کند.
- اگر محمد دروغ‌گو باشد مرتضی او را پیدا می‌کند.
- اگر مصطفی یا مهدی دروغ‌گو باشند مرتضی آنها را پیدا می‌کند.

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۰ ه) ۳

کامبیز کفش‌های جدیدی خریده است. این کفش‌ها ویژگی جالبی دارند و آن این که بعد از پیمودن اولین گام، اگر طول گام قبلی‌ای که با این کفش برداشته شده است x باشد در گام بعدی او فقط می‌تواند گامی یا به طول ۲x یا به طول $\frac{x}{2}$ بردارد. به دلیل وزن زیاد کامبیز، کامبیز نمی‌تواند گامی با طول کوچکتر از یک بردارد! همچنین او نمی‌تواند هرگز جهت حرکتش را تغییر بدهد و همواره مستقیم پیش می‌رود.
در ابتدای کار کامبیز در خانه صفرم یک جدول ۱- در – بی‌نهایت قرار دارد. در اولین مرحله، کامبیز با برداشتن یک گام به طول یک از خانه‌ی صفرم به خانه‌ی یکم می‌رود. هدف کامبیز این است که با پیمودن تعدادی گام به یک نقطه‌ی مشخص شده برسد. مثلاً یک دنباله حرکات قابل قبول برای رسیدن به خانه‌ی سیزده می‌تواند به این صورت باشد:

$$۰ \rightarrow ۱ \rightarrow ۳ \rightarrow ۷ \rightarrow ۹ \rightarrow ۱۰ \rightarrow ۱۲ \rightarrow ۱۳$$

یک خانه را "خوب" می‌گوییم اگر کامبیز بتواند با اتخاذ یک سیاستِ گام برداشتن به آن خانه برسد. به طور مشابه، یک خانه را "بد" می‌گوییم اگر کامبیز هرگز نتواند با هر ترتیبی به آن برسد. برای مثال ۱۳ یک خانه‌ی خوب و ۲ یک خانه‌ی بد است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۳۲- کدام گزینه صحیح است؟

الف) ۱۳۹۰یک خانه خوب و ۲۰۱۲ یک خانه‌ی بد است.
ب) ۲۰۰۰ یک خانه‌ی خوب و ۱۴۰۰ یک خانه‌ی بد است.
ج) ۱۴۰۰ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۰۰ یک خانه‌ی بد است.
د) ۱۳۹۱ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۱۳ یک خانه‌ی بد است.
ه) ۲۰۱۲ یک خانه‌ی خوب و ۱۳۹۰ یک خانه‌ی بد است.

۳۳- فرض کنید تمام خانه‌های خوبی که با حداکثر ۱۰۰ حرکت می‌توان به آن رسید را با شروع از یک، در دنباله‌ای مرتب پشت سر هم نوشته‌ایم. این دنباله به شکل (...,۱,۳,۴,۶) است. ۲۰۱۲ اُمین عدد این دنباله کدام است؟

الف) ۲۰۱۳ ب) ۴۰۲۴ ج) ۳۰۱۸ د) ۲۰۱۲ ه) ۳۰۱۹

رشته‌ی $S_0 = aAbBaAb$ را در نظر بگیرید. از روی این رشته می‌توانیم رشته‌ی S_1 را با این قاعده بسازیم که به جای هر حرف A عبارت BaB و به جای هر B عبارت AbA را بگذاریم. با این وصف رشته‌ی S_1 برابر با aBaBbAbAaBaBb خواهد بود. با همین قاعده می‌توانیم رشته‌های S_2، S_3 و ... را بسازیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۳۴- ۷۷۷اُمین حرف از سمت چپ در رشته‌ی S_7 کدام است؟

الف) a ب) اندازه‌ی رشته کمتر از ۷۷۷ است. ج) A د) B ه) b

۳۵- ۱۰۲۷اُمین حرف از سمت چپ در رشته‌ی S_9 کدام است؟

الف) اندازه‌ی رشته کمتر از ۱۰۲۷ است. ب) a ج) A د) B ه) b

«پاسخنامه تشریحی»

۱- گزینه «ب» درست است.

هر بار که نوید بازی را می‌برد یک W و هر بار او می‌بازد یک L و برای هر مساوی‌ها نیز یک D در ادامه حروف نوشـــته شده (با شروع از تخته سیاه خالی!) روی تخته می‌نویسیم. اکنون خواسته‌ی سوال تعداد رشته‌های به طول ۷ است که درای ۳ حرف W، حداکثر ۲ حرف L و تعدادی حرف D باشند است. همچنین یکی از Wها باید در انتهای این رشته باشد؛ زیرا یک برد نوید دقیقاً باید در پایان دست هفتم اتفاق بیفتد که بازی همان جا دقیقاً تموم شود. پس می‌توان با در نظر گرفتن این قضیه، تنها تعداد رشته‌هایی به طول ۶ از سه حرف W و L و D را یافت که در آن حداکثر ۲ حرف L و دقیقاً ۲ حرف W داشته باشیم؛ سپس به انتهای تک تک این رشته‌ها یک W افزود تا یک جواب یکتای مسئله بشود!

برای محاسبه تعداد این رشته‌های ۶ حرفی می‌بینیم که این دقیقه ۲ تا W موجود می‌توانند به $۱۵ = \frac{۶!}{۴!\times ۲!} = \binom{۶}{۲}$ حالت جایگاه خودشان در رشته ۶ حرفی را تثبیت کنند. سپس ۴ جایگاه باقی‌مانده می‌توانند به $۱۶ = ۲^{۴}$ روش حروف L و D بگیرند، منتهی حالتی که در آن همه L باشند (یک حالت) و یا دقیقاً سه تا L داشته باشیم (و یک D، دقیقاً ۴ حالت) غیرمجاز است. پس از آن ۱۶ روش، این ۵ حالت غیرمجاز را اگر حذف کنیم تعداد راه‌های مجاز برای پر کردن این خانه باقی‌مانده برابر ۱۱ می‌شود. در انتها، طبق اصل ضرب جواب نهایی برابر با $۱۶۵ = ۱۱ \times ۱۵$ است.

۲- گزینه «ه» درست است.

عمل «جابجایی x» را انتقال عدد x و کلیه اعداد هـــم ستونش که بالای آن هستند به ستون دیگر تعریف می کنیم. برای نمونه در صورت سؤال عمل «جابجایی ۲ » به عنوان مثال ذکر شده است.
اگر اعمال «جابجایی ۱ » ، «جابجایی ۵ » ، «جابجایی ۴ » ، «جابجایی ۶ » ، «جابجایی ۳ » و در نهایت «جابجایی ۷ » را انجام بدیم، خواهیم دید که در پایان این عمل، اعداد به نحو خواسته شده در ستون دوم مرتب می شوند.
برای اثبات اینکه در کمتر از ۶ مرحله این مرتب سازی امکان پذیر نیست کافی است در نظر داشته باشیم که هر دو عدد متوالی که ترتیب آن‌ها درست نیست نیازمند یک جابه جایی مجزا از وسطشان می‌باشند. تعداد این زوج‌ها در این مسأله ۵ می‌باشد. هم‌چنین یک جابه‌جایی برای بردن به بالای یک ستون نیاز است. پس حداقل ۶ حرکت لازم است و با ۶ حرکت نیز یک روش حل ارائه کرده‌ایم.

۳- گزینه «الف» درست است.

می توان نشان داد شرط لازم و کافی برای اینکه یک دنباله موفق باشد این است که بین هر دو عدد ۱- متوالی آن حداقـل دو عدد ۱ آمده باشد. (چرا؟) پس در این دنباله حداکثر ۳ عدد ۱- وجود دارد. اکنون روی تعداد اعداد ۱- در دنباله حالت بندی می‌کنیم.
اگر دقیقاً ۳ عدد ۱- وجود داشته باشد حتماً باید دو عنصر انتهایی و همچنین عنصر میانی رشته برابر با ۱- و سایر عناصر برابر با ۱ باشد. پس در اینجا یک حالت داریم.
اگر دو عدد ۱- وجود داشته باشد، - سمت چپ می‌تواند عنصر اول، دوم، سوم یا چهارم (از سمت چپ) باشد که به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ انتخاب برای دومین ۱- باقی می‌گذارد. پس در اینجا ۱۰ حالت خواهیم داشت.
اگر یک عدد ۱- وجود داشته باشد، این ۱- در هر یک از هفت جایگاه می تواند قرار بگیرد.
نهایتاً اگر هیچ ۱- ای نداشته باشیم نیز یک حالت (تمام ۱) داریم.
حاصل جمع تمامی این حالت‌های حالت‌بندی شده برابر با $۱۹ = ۱ + ۷ + ۱۰ + ۱$ حالت است.

۴- **گزینه‌ی «ب» درست است.**

مجید باید در هر یک از ۵ سطر اوّل (بالایی) انتخاب کند که از کدام خانه‌ی آن سطر به سمت پایین می‌رود و پس از آن دقیقاً یک مسیر یکتا خواهد داشت! (چرا؟)

انتخاب خانه‌ی «پایین رونده» برای هر کدام از این ۵ سطر ۶ حالت پیش روی مجید قرار می‌دهد. پس جواب برابر است با $۷۷۷۶ = ۶^۵$.

۵- **گزینه‌ی «ب» درست است.**

اعداد را براساس باقیمانده‌شان در تقسیم بر ۳ به سه گروه تقسیم می‌کنیم. هیچ دو عددی که باقیمانده هر دویشان بر ۳ برابر ۱ باشد نمی‌توانند کنار هم در یک کامیون بیایند. (چرا؟) پس حداقل ۵ کامیون لازم است تا این اعداد، یعنی ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ هر کدام‌شان در یک کامیون حمل شوند.

همین قضیه در مورد اعضای گروه دوم (یعنی ۲ و ۵ و ۸ و ۱۱) نیز صادق است. آن‌ها را نیز در کامیون‌های جدا قرار می‌دهیم. در مورد اعضای گروه سوم (باقی‌مانده صفر) هم محدودیتی نداریم. پس یک روش با ۵ کامیون می‌تواند قرار دادن اعداد $\left\langle ۳k, ۳k+۱, ۳k+۲ \right\rangle$(در صورت وجود این اعداد در بازه‌ی اعداد داده شده) در کامیون k برای $۰ \leq k \leq ۴$ باشد.

۶- **گزینه‌ی «الف» درست است.**

در مرحله اول عملیات گفته شده را روی اعداد (۳۱ , ۱) و (۳۰ , ۲) و . . . . انجام می‌دهیم. بعد از این حرکت، نیمی از اعداد از بین می‌روند و اعداد زوج باقی می‌مانند. مجدداً همین کار را انجام می‌دهیم تا اعداد به شکل $۴k$باقی بمانند. به همین ترتیب اعمال را انجام می‌دهیم تا به عدد ۱۶ برسیم. عدد ۱۶ و عدد ۳۲ که در ابتدا کنار گذاشته شده بود هم با ۲ حرکت به عدد ۰ تبدیل می‌شوند.

۷- **گزینه‌ی «الف و ج» درست است.**

صورت سوال به همین شکل کامل است و اگر به تعاریف دقیق منطق ریاضی هم رجوع کنیم مشکلی در سوال دیده نمی‌شود و تنها یک گزینه درست خواهد بود که «حداکثر ۳ گزاره‌ی صحیح» است.

تعاریف منطق مورد استفاده در این سوال چندان دور از ذهن نبوده و حتی اگر دانش‌آموزی با آنها به صورت دقیق برخورد نکرده باشد در درک آنها با مشکلی روبرو نمی‌شود. تعریف تناقض از جمله‌ی این موارد است.

صورت سوال در دو عبارت کج‌تابی دارد: یکی «گزاره» که با دقت به تعریف دقیق آن جواب درست سوال ۳ خواهد بود و دیگری «... با هم درست باشند؟» که از آن می‌تواند تلقی شود کنار گذاشتن یک گزاره و در نظر گرفتن مستقل دیگر گزاره‌ها نیز مجاز است.

با این که برداشت دوم باز هم با توجه به معنای دقیق «گزاره» جواب را نتیجه می‌دهد، اما چون هدف، سنجش میزان دقت داوطلبان به تفاوت میان «گزاره» و «جمله» نیست، جواب ۴ نیز مورد قبول قرار می‌گیرد.

در نهایت باید گفت این سوال توانایی تحلیل درخت حالت یک مساله‌ی پیچیده را مورد سنجش قرار می‌دهد.

۸- **گزینه‌ی «ب» درست است.**

برای یافتن یک ایده مناسب سعی می‌کنیم مسئله را از مقدارهای کم به زیاد حل کنیم. برای یک تکه الوار به طول یک (برای سادگی آن را «الوار یک» می‌نامیم) هیچ مرحله‌ای لازم نیست! برای الوار دو، به هر تعدادی هم که باشند، یک برش کافی است. برای الوار سه ما به دو برش احتیاج داریم، اول آن را به الوار یک و الوار دو تقسیم کنیم؛ بعد الوار دو را ببریم. برای الوار ۴ هم، مشابه سه به دو برش احتیاج داریم؛ یکی تقسیم بر دو الوار دو، یکی هم برش‌های الوارهای دو.

اکنون کمترین طول الواری که با سه برش می‌توان آن را به الوارهای یک تبدیل کرد چند است؟ الوار هشت! کافی‌ست آن را به دو الوار۴ تبدیل کنیم. دیدیم هم که الوار ۴ هم با دو برش حل می‌شود، پس الوار هشت با سه برش کلاً تقسیم می شود. (چرا الوارهای بزرگتر از هشت با سه برش کامل تقسیم نمی شوند؟)

با همین رویه می‌بینیم توان‌های دو بهترین الوارها هستند. در واقع یک الگوریتم این است که طول الوار اولیه را به مبنای دو برده و آن را به صورت جمع توان‌های ۲ی یکتا بنویسیم؛ سپس با بریدن این توان‌های دو از الوار اولیه، عملاً تنها تعدادی الوار توان دو برای ما بماند. سپس از بزرگترین توان دو شروع به نصف کردن می‌کنیم. برای مثال می‌توان ۱۰۰ را به صورت ۴ + ۳۲ + ۶۴ نوشت. کافی‌ست ابتدا ۶۴ را با یک برش از آن جدا کنیم تا به دو قسمت ۶۴ و ۳۶ تقسیم بشود. در برش بعدی ۳۶ را به دو قسمت ۳۲ و ۴ تقسیم می کنیم. اکنون از این جا به بعد کافی‌است تنها ۶۴ را حل کنیم (در ۶مرحله). پس این جواب با ۸ مرحله به دست می‌آید.

در واقع طبق این الگوریتم اگر طول الوار اولیه ما L باشد و نمایش مبنای دوی آن به صورت B باشد که دقیقاً n بیت ۱ داشته و طول B نیز برابر k بیت باشد، می توان در $(\mathrm{n}-۱)+(\mathrm{k}-۱)$ برش آن را به الوارهای یک تقسیم کرد.

چرا این الگوریتم بهینه است و کمترین تعداد برش را به ما نشان می‌دهد؟ کافی‌ست توجه کنید که اگر عدد L که نمایش مبنای دوی آن B (با طول k بیت که n تا از این بیت‌ها یک هستند) را با یک برش به دو الوار X و Y تقسیم کنیم، اولاً حاصل‌جمع تعداد بیت‌های یک Y و تعداد بیت‌های یک Y کمتر از n نمی‌شود، ثانیاً طول مبنای دوی یکی از این دو عدد حداقل ۱ - k است. (ادامه اثبات بر عهده خواننده)

۹- گزینه «ب» درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم نمی‌توان ۱۲ خانه‌ی مهره‌دار ساخت.

با انجام عملیات روی یک خانه حداکثر ۲ خانه‌ی جدید به خانه‌های مهره‌دار اضافه می‌شود. پس حداقل ۶ بار جابه‌جایی نیاز است تا ۱۲ خانه دارای مهره شوند. از سوی دیگر این کار نیازمند سوزاندن ۶ مهره می‌باشد که در نتیجه‌ی آن ۱۰ مهره باقی می‌ماند که کمتر از ۱۲ است. پس به تناقض می‌رسیم و امکان ندارد بیش از ۶ بار جابجایی انجام شود.

جواب ۱۱ را هم به راحتی می توان به چندین روش مختلف ساخت. یک روش آن انجام عمل روی خانه‌های اول و دوم و سوم از سمت چپ در سطر بالا و سپس خانه‌های دوم و سوم از ستون سوم با نسبت مناسب مهره‌ها هست به طوری که در پایان این ۵ بار عملیات، در هر کدام از خانه‌هایی که شانس دارا بودن مهره را دارند، دقیقاً یک مهره باقی مانده باشد.

۱۰- گزینه‌ی «ه» درست است.

می بینیم که در شکل نهایی تمامی اعداد فرد یک رقمی در سطر و اعداد زوج (به انضمام عدد یک در مرکز) در ستون هستند.

از سوی دیگر، هر عدد زوجی که در سطر شکل باشد و یا هر عدد فردی که در ستون باشد برای رسیدن به مقصد نهایی خودش، حتماً باید یک بار به وسط شکل بیاید و سپس به محل نهایی‌اش برود. با این وصف کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن ۱ در وسط بود و تمامی اعداد زوج در سطر و تمامی اعداد فرد در ستون باشند.

در این حالت به ازای هر یک از اعداد ۲ تا ۹، الزاماً باید حداقل یک بار هر کدام این اعداد به مرکز بیایند. (چرا؟) پس تا این جای کار ۸ حرکت انجام داده‌ایم. پس از این حرکت نیز، می‌دانیم عدد مرکزی ۱ نیست.

پس یک حرکت نیز برای آوردن ۱ به مرکز لازم است. پس برای این مرتب‌سازی حداقل ۹ حرکت نیاز است و با ۹ حرکت هر ترکیبی را می‌توان درست کرد؛ کافی است اعدادی که در سطر یا ستون مناسب خودشان نیست را یکی یکی (با تناوب سطر و ستون در صورت نیاز) به مرکز بیاوریم.

۱۱- **گزینه «الف» درست است.**

کافیست روی تعداد پیتزای مخصـــوص حالت‌گیری کنیم و تعداد پیتزای پپرونی را در هر حالت بدست بیاوریم. اگر این خانواده ۵ پیتزای مخصوص و ۳ پیتزای پپرونی بخرند، ۷۴۰۰۰ تومان خرج می‌کنند و ۴ تا از بچه‌ها با ۶ تکه پیتزای پپرونی سیر می‌شوند و بقیه پیتزای مخصوص می‌خورند.

به این نکته توجه شود که برای دسته‌ی اول استفاده از پیتزای مخصوص به صرفه و برای دسته آخر پپرونی به صرفه است و برای دسته وسط فرقی نمیکند.

۱۲- **گزینه «ه» درست است.**

با نگاه به خطوط ۳ و ۵ می‌توان دریافت که این برنامه بر روی نمایش مبنای دو (باینری) اعداد a و b کار می‌کنـد. بدنه‌ی اصلی این برنامه حلقه‌ی شامل خطوط ۳ تا ۷ است. در این حلقه مقادیر a و b تنها در خط ۵ تغییر می‌کند و متغیر i که در خط ۴ هر بار یک واحد افزایش می‌یابد شمارنده‌ی حلقه است. در واقع می‌توان دید که در زمان i امین اجرای این حلقه مقادیر a و b باقی‌مانده‌ی تقسیم مقادیر اولیه این دو عدد بر ۲^i یا به عبارتی انتقال یافته‌ی نمایشی باینری این اعداد به اندازه‌ی i واحد به سمت راست هستند.

از سوی دیگر، تعداد شکلات‌های دریافتی در خروجی برنامه تنها به مقدار s وابسته است و این مقدار تنها در خط ۳ تغییر می‌کند. با کمی دقت می‌توان دریافت که این متغیر تنها در زمان‌هایی افزایش می‌یابد که بیت سمت راست (باقی مانده بر ۲) در اعداد a و b با هم متفاوت باشد و این مقدار افزایش نیز برابر با شماره حلقه است.

به عبارت ساده‌تر، مقدار در پایان برنامه برابر با حاصل‌جمع شماره بیت‌هایی است که a و b در آن بیت‌ها با هم متفاوتند. برای مثال اگر $a = ۱۳ = (۱۱۰۱)_۲$ و $b = ۳۰ = (۱۱۱۱۰)_۲$ باشد، می‌بینیم که این دو عدد در بیت‌های اول و دوم و پنجم (از سمت راست) با هم متفاوتند، پس مقدار s در پایان‌برنامه به ازای ورودی‌های ۱۳ و ۳۰ برابر با خواهد بود.

اکنون به حل مسئله می پردازیم. تنها حالات ممکن برای این که در پایان برنامه مقدار متغیر s برابر با ۳ باشد، یکی از دو حالت زیر است:

(آ) تنها در یک مرحله، ۳ واحد به S اضافه شده باشد.

در این صورت اعداد ورودی تنها در بیت سوم با هم اختلاف دارند. برای حداکثر شدن حاصل ضرب دو عدد ورودی، بقیه بیت‌ها باید برابر ۱ باشند و در این حالت بیشترین حاصل ضرب مربوط به اعداد ۳۱ و ۲۷ با (نمایش های $(۱۱۱۱۱)_۲$ و $(۱۱۰۱۱)_۲$)است.

(ب) در دو مرحله، اعداد ۱ و ۲ به s اضافه شده‌اند.

در این صورت، اعداد ورودی دقیقاً فقط در بیت‌های اول و دوم با هم اختلاف دارند. بر حسب آن که دو بیت آخر که در دو عدد ورودی متفاوتند به صورت ۱۱ و ۰۰ یا به صورت ۱۰ و ۰۱ باشند، بیشترین حاصل‌ضرب متعقل به زوج اعداد (۳۱ و ۲۸) یا (۳۰ و ۲۹) است.

با مقایسه حاصل ضرب ۳ زوج اعداد یافته شده در بالا، خواهیم دید که بیشترین خروجی ممکن برابر با $۳۰ * ۲۹ = ۸۷۰$ است.

۱۳- **گزینه «ه» درست است.**

یک راه این است که فقط از سؤال نوع اول استفاده کنیم. در این صورت در بدترین حالت ممکن است مجبور به پرداخـت ۱۰ انار بشـویـم! در غیر این صورت حداقل یک بار از سؤال نوع دوم استفاده می‌کنیم. این سؤال می‌تواند به راحتی بازه‌ی گزینه‌های ممکن برای جواب را نصف کند (در صورتی که بازه متوالی باشد، مثل شروع کار که بازه از صفر تا ۹ شامل هر دو این اعداد، است). پس بهتر است حتماً اولین سؤال ما نوع دوم باشد که بازه را از ۱۰ گزینه به گزینه تقلیل بدهد. چرا؟)

اکنون با یک بازه ۵ گزینه‌ای طرفیم که بدون لطمه به فرض مسئله، آن را صفر تا ۴ (شامل هر دوی این اعداد) تصور می‌کنیم. حال اگر بخواهیم یک بار دیگر سؤال نوع دوم بپرسیم در واقع بر حسب بلی یا خیر بودن جواب با دو حالت ۲ گزینه‌ای و ۳ گزینه‌ای مواجه می‌شویم. و در بدترین حالت ممکن است با این سؤال و با پرداخت ۳ سیب، تنها دو گزینه را حذف کنیم!

پس بهترین حالت این است که از اینجا به بعد تنها به سؤالات نوع اول اکتفا کنیم. و در بهترین حالت با ۳ سیب در ابتدا و بعد ۵ بار تک سیب در ادامه، یعنی جمعاً ۸ سیب، حتماً به جواب می رسیم.

۱۴- گزینه‌ی «ه» درست است.

روی تأسیس یا عدم تأسیس خانه روی دو رأسی که درجه ۳ دارند (مشترک بین دو شش ضلعی) که آنها را رأس‌های طلایی می‌نامیم حالت‌گیری می‌کنیم. واضح است که هر دوی این رأس‌ها هم‌زمان نمی‌توانند خانه داشته باشند. در حالتی که هیچ یک از این رأس‌ها انتخاب نشود، با حذف آن دو، به دو مسیر مجزای ۴ رأسی می‌رسیم. از آن جا که هر مسیر ۴ رأسی را می‌توان به سه روش مورد خانه‌سازی بیشینه (خواست مسئله) قرار داد، پس در این حالت به ۹ روش می‌توان خانه‌ها را ساخت. اما نکته قابل تأمل آن جاست که هر کدام از رأس طلایی باید حداقل یکی از همسایه‌های غیرطلایی‌اش الزاماً انتخاب شود. در غیر این صورت شرط «ثانیاً» در صورت مسئله روی آن رأس طلایی نقض می‌شود. با کمی دقت می‌توان دریافت که از ۹ حالت شمارده شده، دقیقاً ۲ حالت مشمول این حالت می‌شوند که می‌بایست از حالت‌های انتخاب شده کسر شوند. و در نتیجه در این حالت در مجموع ۷ حالت مجاز داریم.

در حالت دیگر اگر یکی از رأس‌های طلایی انتخاب شوند، با حذف آن رأس و رئوس مجاورش کل گراف به دو مسیر ۳ رأسی تبدیل می‌شود که هر مسیر دو حالت برای خانه سازی بیشینه دارد (یا دو رأس انتهایی، یا رأس وسطی). پس در این حالت برای هر رأس میانی که انتخاب شود ۴ حالت و در مجموع ۸ حالت داریم.

با این وصف، جواب نهایی برابر ۱۵ روش خواهد بود.

۱۵- گزینه «د» درست است.

اعداد مورد نظر را به دسته‌های ۴تایی متوالی تفسیم می‌کنیم. باقیمانده‌ی حاصل ضرب اعداد داخلی هر دسته بر ۵ برابر است با:

$$\prod_{i=5x+1}^{5x+4} i \equiv (1\times 2\times 3\times 4) \equiv 24 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$$

از طرف دیگر تعداد دسته های اعداد برابر است با:

$$\frac{10^5 - 10^4}{5} = 18000$$

پس باقی‌مانده‌ی حاصل‌ضرب خواسته‌شده بر ۵ معادل $(-1)^{18000} \equiv 1 \pmod 5$ خواهد بود.

۱۶- گزینه‌ی «الف» درست است.

در ابتدا برای هر قاب مشخص می کنیم که حداکثر چند قاب به صورت تو در تو می‌تواند درون آن قرار بگیرد. واضح است که هیچ قابی نمی‌تواند درون قاب‌های ۵ و ۶ و ۷ قرار بگیرد. قاب‌های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ می‌توانند یکی از قاب‌های قبلی را در خود جای بدهند و در نتیجه حداکثر یک قاب درونشان می‌تواند قرار بگیرد. قاب ۱۵ می‌تواند قاب ۱۱ را (که خود می‌تواند قاب ۵ یا ۶ یا ۷ را در بر بگیرد) در خود جای دهد؛ پس قاب ۱۵ می تواند حداکثر دو قاب درونش داشته باشد. قاب ۱۸ نیز به طور مشابه می تواند قاب ۱۳ یا ۱۲ (که خود می‌توانند شامل قاب ۵ یا ۶ یا ۷ شوند) را داشته باشد که حداکثر قاب‌های درونش دو عدد می‌شود. قاب ۲۱ (با در برگرفتن ۱۵) و قاب ۲۲ یا ۲۳ (با در برگرفتن ۱۸) می‌توانند سه قاب داخل خودشان جای بدهد و جمعاً ۴ قاب ممکن را بسازند. به همین نحو برای قاب‌های ۲۵ و ۲۹ می‌توان به ترتیب ۵ و ۶ قاب تو در تو داشت.

اکنون مسئله را با رویکرد مشابه برای مساحت فضای خالی پیگیری می‌کنیم. می‌دانیم اگر به عنوان مثال حضور قاب ۱۱ در ترکیب ۴ قاب نهایی اجباری باشد، آنگاه بهتر آن است که حتماً یکی از قاب‌های قابل قرارگیری درون آن، یعنی ۵ یا ۶ یا ۷ نیز انتخاب شوند (چرا؟) و همچنین قاب ۷ از قاب‌های ۵ و ۶ برای این منظور بهتر است، چرا که از ۴۹ سانتی‌متر مربع داخل قاب ۱۱، فضای بیشتری را اشغال می‌کند.

همچنین اگه قرار باشد قاب ۱۱ در قاب دیگری (مثلاً قاب ۱۸) قرار بگیرد، می‌توان مسئله درونی قاب ۱۱ را به صورت مستقل بررسی کرد.

با این رویه، اکنون برای هر قاب بیشترین تعداد قاب‌های قابل قرارگیری درونش (مشابه پاراگراف اول) و کم‌ترین مساحت خالی باقی‌مانده درون آن را از کوچکترین به بزرگترین قاب محاسبه می‌کنیم.

- قاب ۵ فضای خالی برابر با ۱ سانتی‌متر مربع خواهد داشت و با احتساب خودش ۱ قاب را در بر می‌گیرد. برای قاب‌های ۶ و ۷ نیز فضای خالی بهینه به ترتیب ۴ و ۹ سانتی‌متر مربع خواهد بود.
- قاب های ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ بهتر است قاب ۷ را (که درونش ۹ واحد فضای خالی دارد) در خود جای دهند؛ پس بهترین حالت برای هر یک از این‌ها تشکیل ۲ قاب تو در تو با (احتساب خودشان) و به ترتیب ۹ و $۹+۱۵=۲۴$ و $۹+۳۲=۴۱$ واحد است. یعنی مثلاً قاب ۱۳ می‌تواند جمعاً دو قاب داشته باشد و ۴۱ سانتی‌متر مربع فضای خالی کمترین فضای خالی باقی‌مانده برایش در آن حالت است.
- قاب ۱۵ تنها قاب ۱۱ را می‌تواند در بر بگیرد که در این حالت ۳ قاب تو در تو با ۹ واحد فضای خالی خواهند داشت.

قاب ۱۸ می تواند هر یک از قابهای ۱۳ یا ۱۲ یا ۱۱ را در بر بگیرد که به ترتیب $۴۱+۲۷=۶۸$ و $۲۴+۵۲=۷۶$و $۹+۷۵=۸۴$ سانتی‌متر فضای خالی ایجاد می‌کند. پس بهترین گزینه برای قاب۱۸، در بر گرفتن مستقیم قاب ۱۳ و ایجاد ۶۸ سانتی‌متر فضای خالی است.

- قاب ۲۱ می‌تواند قاب ۱۵ را در بر بگیرد که در این حالت ۴ قاب تو در تو با $۶۴+۹=۷۳$ واحد فضای خالی دارد. (یک جواب کاندید)
- قاب ۲۲ می‌تواند قاب ۱۸ را در بر بگیرد که دقیقاً در آن فیت می‌شود و همان ۶۸ واحد فضای خالی را در حالت «۷,۱۳,۱۸,۲۳» خواهند داشت.
- قاب ۲۳ نیز می‌تواند قاب ۱۸ را در بر بگیرد که فضای خالی بین همین دو قاب قطعاً بیش از صفر واحد فضای خالی بین ۲۲ و ۱۸ است! پس این گزینه مطلوب نیست.
- برای سایر قاب‌های بزرگتر نیز، جواب بهتری از ۶۸ واحد پیدا نمی‌شود.

۱۷- گزینه «الف» درست است.

روی طول دنباله حالت‌گیری می‌کنیم.

اعداد ۷ و ۱۱ اول هستند، پس نمی‌توانند استفاده شوند. در صورت استفاده از عدد ۹ نیز، هیچ عدد دیگری نمی‌تواند قبل یا بعد از آن در میانه‌ی دنباله بیاید چرا که ۹ تنها مضرب از ۳ کاندیداهای ممکن است. پس تنها یک حالت $\langle ۶,۹,۱۲\rangle$ را داریم.

اعداد ۸ و ۱۰ زوج می‌باشند و هر گونه دنباله‌ی زوج چون همه‌ی اعداد آن بر ۲ پخش‌پذیر است، معتبر است. پس بر حسب وجود یا عدم وجود هر کدام این دو، ما جمعاً می‌توانیم حالت داشته باشیم. دقت کنید که چون صحبت از دنباله آمده است، در حالتی که هر دوی ۸ و ۱۰ بخواهند ظاهر شوند، ترتیب آن دو می‌تواند صعودی یا نزولی باشد! ولی در بقیه‌ی حالات دقیقا یک حالت داریم. پس در این قسمت ما به طور دقیق ۵ حالت می‌توانیم داشته باشیم.

نهایتاً جواب نهایی برابر با ۶ دنباله به صورت زیر است:

$$\langle ۶,۹,۱۲\rangle,\langle ۶,۱۲\rangle,\langle ۶,۸,۱۲\rangle,\langle ۶,۱۰,۱۲\rangle,\langle ۶,۸,۱۰,۱۲\rangle,\langle ۶,۱۰,۸,۱۲\rangle$$

۱۸- گزینه «د» درست است.

بر حسب فاصله‌ی اولین وآخرین مهره‌ی انتخاب شده حالت‌گیری می‌کنیم.

اگر این مهره‌ها همگی در کنار هم باشند (فاصله $k-۱$) در آن صورت کافی‌ست تنها مکان اولین مهره را تعیین کنیم که در نتیجه $n-k+۱$ حالت داریم.

در صورتی که فاصله این مهره‌ها k باشد (یک خانه خالی میان رشته مهره‌های انتخاب شده وجود داشته باشد)، برای مکان اولین مهره $n-k$ حالت و برای انتخاب مکان خانه خالی هم $k-۱$ حالت داریم. پس جواب این حالت برابر با $(n-k)\times(k-۱)$ حالت می‌شود. دقت کنید که خانه‌ی خالی نمی‌توان بعد از آخرین مهره قرار بگیرد، چرا که این حالت را در قسمت قبل شمارده‌ایم.

آخرین وضعیت، در مواقعی است که فاصله اولین و آخرین مهره برابر با $k+۱$ باشد. در این حالت دو خانه‌ی خالی در رشته داریم که جواب به صورت $(n-k-۱)+\binom{k}{۲}$ می‌شود.

با ساده سازی ریاضی و فاکتور گرفتن از $(n-k)$ می‌توان دید که جمع این سه حالت می‌شود:

$$(n-k-1)+(n-k)\times(k-1)+(n-k-1)\times\binom{k}{2}$$

۱۹- **گزینه «ب» درست است.**

این الگوریتم دارای دو حلقه مجزا در خطوط ۲ تا ۳ و سپس در خطوط ۴ تا ۷ است. در حلقه اول، از مقدار اولیه x، یک مقدار y به دست می‌آید. در حلقه دوم نیز از مقدار y، مقدار جدید z ساخته می شود. اکنون این دو حلقه مجزا را از انتها به ابتدا بررسی می‌کنیم.

ابتدا می‌خواهیم ببینیم برای چه yهایی در اولین ورود به خط چهارم (خروجی حلقه اول) در پایان کار z صفر خواهد شد. برای صفر ماندن z می‌بایست در خط ۵ همواره باقی‌مانده تقسیم y بر دو یا در واقع سمت راست‌ترین بیت y صفر باشد. در خط ۶ نیز می‌بینیم که در واقع معادل باینری عدد y، دو واحد به سمت راست شیفت می‌یابد (دو بیت سمت راستش حذف شده و بقیه بیتها ارزش شان دو مرتبه کمتر می‌شود). از این‌رو، شرط لازم و کافی برای صفر بودن z در پایان کار این است که نمایش مبنای دوی y باید حتماً به صورت $a\circ b\circ c\circ d\circ e\circ$ باشد که a تا e می‌توانند صفر یا یک باشند.

اکنون حلقه اول را تحلیل می‌کنیم. با کمی تحلیل می‌توان دید که y در واقع XOR خود x و یک واحد شیفت یافته به راست x (همان $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$) و دو واحد شیفت یافته به راست x و ... است. یعنی در واقه بیت iاُم y (از سمت چپ) برابر با XOR تمامی i بیت پرارزش x است. برای مثال اگر $x=13=(1101)_2$ باشد، بیت اول y برابر با ۱، بیت دوم y برابر با XOR دو بیت سمت چپ x یعنی ۱ و ۱ است. بیت سوم y برابر با XOR سه بیت سمت چپ (ابتدا دو تاشان با هم، بعد حاصل با بیت سوم XOR شود) یعنی $1\oplus1\oplus0=0$ است. پس در نهایت $y=(1001)_2=9$ می‌شود.

با کمی دقت می‌توان دریافت که y در واقع تابعی یک به یک و پوشا است. یعنی به ازای هر x دقیقاً یک y ساخته می شود و هر y نیز دقیقاً از یک x به دست میآید.

با این وصف تنها کافی است تعداد اعدادی که به صورت هستند را به عنوان y های مطلوب بشماریم. چرا که طبق گفته‌های بالا، هر کدام از این yها الزاماً حاصل انجام عملیات خطوط ۲ تا ۳ روی دقیقاً یک x هستند.

از آن‌جا که برای هر کدام از بیت‌های a تا e نیز می‌توان دو حالت صفر یا یک تصور کرد، پس در مجموع $32=2^5$ عدد x وجود دارد که خروجی $z=0$ را بر می‌گردانند.

۲۰- **گزینه‌ی «الف» درست است.**

از آن جا که ۵ ستون داریم و در هر ستون باید حداقل ۱ ستاره قرار بگیرد، حداقل ۵ ستاره مورد نیاز است. از آن جا هم که ۳ سطر داریم و در هر سطر حداکثر ۲ ستاره می‌تواند واقع شود، حداکثر ۶ ستاره می‌توانیم داشته باشیم. پس دقیقاً یا ۵ و یا ۶ ستاره داریم.

در حالتی که ۵ ستاره داشته باشیم، ستاره‌ها از نظر ستونی باید متمایز باشند و در سطرها هم می‌بایست الزاماً ۲ و ۲ و ۱ ستاره قرار بگیرد. برای دقیق‌تر کردن شمارش می‌توان گفت که بالای هر ستون، اندیس سطری که ستاره‌ی آن ستون در آن واقع است را می‌نویسیم. پس هر حالت به صورت یکتا متناظر خواهد بود با یک رشته به طول ۵ از اعداد ۱ و ۲ و ۳ که در آن هر عدد دقیقاً یک بار ظاهر شده است. برای شمارش تعداد این رشته‌ها، ابتدا کافی است عددی که تنها یک بار ظاهر می‌شود را ابتدا انتخاب کرده (۳ حالت) و جایش را در ۵ رشته حرفی مشخص کنیم (۵ حالت)، سپس ۴ جای باقی‌مانده در رشته را به $\binom{4}{2}=6$ حالت با دو تا از هر کدام از دو عدد دیگر پر کنیم. پس تعداد جواب‌های این حالت برابر با $3\times5\times6=90$ می‌شود.

در حالتی که ۶ ستاره داشته باشیم، در هر سطر می‌بایست الزاماً دو ستاره قرار بگیرد و یکی از ستون‌ها هم دو ستاره داشته باشد. ابتدا ستونی که دو ستاره دارد را مشخص می‌کنیم (۵ حالت) و تنها خانه‌ی این ستون که ستاره ندارد را مشخص می کنیم (۳ حالت). فرض می‌کنیم در این ستون خانه‌های سطر a و b (که $۱ \leq a < b \leq ۳$) ستاره دارند. اکنون ستاره‌ی دوم سطر a را مشخص می‌کنیم (۴ حالت) و سپس ستاره‌ی دوم سطر b (سه حالت)، برای سطر مشخص نشده نیز دقیقاً دو ستون خالی وجود خواهند داشت. پس تعداد روش‌های این حالت برابر با $۱۸۰ = ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۳$ خواهد بود.

جواب نهایی نیز برابر با $۲۷۰ = ۱۸۰ + ۹۰$ می‌شود.

۲ حالت زیر دو جواب مسأله است، بقیه جواب‌ها جایگشتی از این حالت‌ها می‌باشند.

```
**...
..*.
....*


**...
..**.
...**
```

-۲۱ گزینه «ج» درست است.

برای سادگی تشریح، نمره‌ی هر دانش آموز را همیشه ضرب در ۴ و سپس به اضافه‌ی ۳۵ می‌کنیم. یعنی اگر نمره ابتدایی n باشد، ما نمره‌ی $۳۵ + n \times ۴$ را در نظر می‌گیریم. چون این عملیات روی تمامی نمرات تأثیر همگون می‌گذارد (تابع یک به یک است)، عملاً تعداد حالت‌های مختلف تغییر نمی‌کند. با این کار در واقع انگار هر پاسخ درست ۵ نمره و هر پاسخ نزده ۱ نمره و هر پاسخ غلط صفر نمره دارد.

به نظر می‌رسد با این کار می‌توان تمام اعداد بین صفر تا ۱۷۵ یعنی ۱۷۶ حالت مختلف را تولید کرد. حال آن که امکان تولید ۱۷۴ و ۱۷۳ و ۱۷۲ و همچنین ۱۶۹ و ۱۶۸ و نیز ۱۶۴ وجود ندارد. چرا که نمی‌توان x و y ای (به مثابه تعداد پاسخ‌های درست و تعداد پاسخ‌های نزده) یافت که اولاً $x + y \leq ۳۵$ و ثانیاً $۵ \times x + y$ برابر با یکی از این ۶ عدد بالا بشود. (اعداد بالا از کجا آمده اند؟)

پس جواب برابر با ۱۷۶ منهای ۶ یا در واقع ۱۷۰ می شود.

-۲۲ گزینه «ج» درست است.

با کمی دقت می‌توان دریافت که متغیر B در هر مرحله یک رقم سمت راست x را جدا می‌کند و آن را به سمت چپ می‌چسباند. این کار تا پایان یافتن ارقام x و صفر شدن آن ادامه دارد. پس y در واقع عدد ساخته شده از برعکس کردن ارقام x است.

می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. از آن جا که ارقام ناصفر x و y با هم برابرند پس باقی‌مانده این دو عدد بر ۳ برابر می‌باشد. و برای بخش‌پذیر بودن $x + y$ ، می‌بایست خود x را بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

پس کافی است تعداد مضارب ۳ در بازه‌ی $[۱,۱۰۰۰۰]$ را بشماریم که به وضوح یک سوم این اعداد یعنی $۳۳۳۳ = \left\lfloor \frac{۱۰۰۰۰}{۳} \right\rfloor$ می‌شود.

-۲۳ گزینه «د» درست است.

برای اعداد ۱ تا ۹ همه اعداد تولید شده بر ۲ بخش‌پذیر هستند چرا که $x + y = ۲x$ است. از ۱۰ به بعد به ازای هر ۱۰ عدد متوالی دقیقاً ۵ تا به ۲ بخش‌پذیر می‌باشند و ۵ تا به ۲ بخش‌پذیر نمی‌باشند. نهایتاً خود عدد ۱۰۰۰۰ هم وقتی با معکوس خود جمع می‌گردد عددی فرد می‌شود.

پس جواب برابر است با: $۵۰۰۴ = ۹ + ۴۹۹۵ = ۹ + ۲ / (۹ - ۹۹۹۹)$

۲۴- گزینه «د» درست است.

می‌دانیم عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر ابتدا ارقام آن عـــدد را یکی در میان به دو دسته تقسیم کنیم و مجموع ارقام هر دسته را به دست آوریم و سپس دو عدد به دست آمده را از هم کم کنیم، عدد حاصل بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

از طرفی در این سؤال ما با یک سری عدد چهار رقمی سروکار داریم. و چون عدد را با معکوسش جمع می‌کنیم مجموع رقم اول و سوم برابر با مجموع رقم دوم و چهارم می‌شود که تفاضل این دو صفر می‌شود که این یعنی عدد بر ۱۱ بخش پذیر است. در نظر داشته باشید که ممکن است جمع دو عدد در یک رقم بیشتر از ۱۰ شود و در عدد نهایی تغییر ایجاد شود اما همچنان عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است چون متناظر آن در جایی دیگر نیز جمع بیشتر از ۱۰ می‌شود). در واقع اگر عدد ما به‌صورت $\underline{abcd}$ باشد، خواهیم داشت $x + y = 1001(a + b) + 110(a + b)$ که همواره مضربی از ۱۱ است.

پس تمام اعداد بر ۱۱ بخش پذیر هستند و هیچ عدد اولی تولید نمی شود.

۲۵- گزینه «د» درست است.

با کمی دقت می‌توان دریافت که شکل اصلـــی را می‌توان به دو بخش مجزا تقسیم کرد. یک بخش خارجی شامل کلیه مثلث‌هایی که یک ضلع یا رأس مشترک با حاشیه شکل اصلی دارند (۱۸ مثلث) و بخش دیگر داخلی شامل ۶ مثلث میانی که تشکیل یک شش ضلعی منتظم می‌دهند.

می‌دانیم مثلث میانی بالاترین سطر شکل باید به صورت افقی و در کنار مثلث‌های هم سطرش پوشیده بشود. (چرا؟) از این رو این مثلث سه حالت برای پوشیده‌شدن خواهد داشت. با تعیین وضعیت پوشیده‌شدن این مثلث، تمامی مثلث‌های بخش خارجی به صورت یکتا پوشیده شدنشان تعیین می‌شود.

برای پوشاندن بخش داخلی نیز کافی است یکی از سه قطر اصلی شش ضلعی منتظم داخلی را در نظر بگیریم.

این قطر دقیقاً بخش داخلی را به دو عدد کاشی تقسیم می‌کند. پس برای بخش داخلی نیز ۳ حالت داریم.

از حال ضرب این دو بخش مستقل، به $۹ = ۳ \times ۳$ روش کاشی‌کاری می‌رسیم.

۲۶- گزینه «ج» درست است.

مثلث‌های شکل یا یک گوشه تیز رو به بالا دارند یا یک گوشه تیز رو به پایین. بر حسب این گوشه آن‌ها را نوع الف یا ب می‌نامیم.

کاشی‌های داده شده همواره یا دو مثلث نوع الف رامی‌پوشانند یا دو مثلث نوع ب. از سوی دیگر اگر اتاق را به دو بخش شامل فقط مثلث‌های نوع الف و فقط مثلث‌های نوع ب تقسیم کنیم می‌بینیم که این دو بخش کاملاً شبیه هم و متقارن هستند. پس کافی است جواب را برای یکی از این بخش‌ها (مثلا فقط مثلث‌های نوع الف) به دست بیاوریم و حاصل را به توان دو برسانیم. (چرا؟)

با حالت گیری می‌توان دید که این زیرمسئله به ۲۸ حالت قابل حل است. پس جواب برای کل شکل برابر است با : $۲۸^۲ = ۷۸۴$

۲۷- گزینه «الف» درست است.

کافیست خانه‌های سطر اول پر شوند. خانه‌های سطر دوم یکتا تعیین می‌گردد.

هر نفر می‌تواند به ۴ نفر دیگر نگاه کند و تعداد نفرات ۵ است پس جواب برابر است با: $۴^۵ = ۲^{۱۰}$

به عبارت دقیق‌تر تعداد حالات برابر است با تعداد گراف‌های جهت‌دار ۵ رأسی و ۵ یالی که هر رأس دقیقاً یک یال خروجی به رأسی غیر از خودش دارد. تعداد این گراف‌ها نیز برابر با همان ۱۰۲۴ حالت است.

۲۸- گزینه «ج» درست است.

فرض کنید جواب الف امین برابر x باشد. از آن جا که کسی به خودش نگاه نمی کنـــد، x چهار حالـــت دارد. اکنـــون جواب الف x را y می‌نامیم. از آن جا که تمامی جدول باید با دو اسم پر بشود، پس جواب الف y نیز می‌بایست x باشد. در نتیجه کل سیستم به این شکل خواهد بود که x و y به هم نگاه می‌کنند و سه نفر دیگر الزاماً به یکی از این دو می‌نگرند.

پس تعداد حالت‌های مسئله برابر خواهد بود با $\binom{5}{2} = 10$ برای انتخاب این دو نفر ضرب در $8 = 2^3$ حالت برای دو گزینه نگاه هر کدام از سه نفر دیگر؛ که حاصل نهایی $80 = 8 \times 10$ خواهد بود.

۲۹- گزینه «ه» درست است.

برای این که بتوان پاسخ‌های مهدی را به صورت یکتا تعیین کرد باید از جواب‌های دیگـران پاسخ سؤال الف مهـدی را یافت که به فرض شخص w است. پاسخ سوال ب مهدی نیز برابر با پاسخ سوال الف شخص w خواهد بود.

برای تعیین کردن w باید حتماً یک نفر مهدی را ببیند که بتوانیم جواب ب‌ی آن شخص، w مورد نظر ما باشد.

یعنی در واقع در گراف ساخته شده، باید حداقل یک یال ورودی به رأس مهدی وجود داشته باشد.

برای شمارش این گراف‌های مطلوب، کافی است گراف‌های نامطلوب (که کسی به رأس مهدی یال ندارد) را از کل گراف‌ها کم کنیم. تعداد این گراف‌های نامطلوب برابر خواهد بود با ۴ حالت برای انتخاب رأسی که مهدی به آن یال دارد ضرب در ۳ گزینه برای هر کدام از ۴ رأس دیگر یعنی $324 = 4 \times 3^4$.

اکنون اگر این تعداد را از کل گراف‌ها (که $1024 = 4^5$ تا هستند) کم کنیم، جواب برابر با $700 = 1024 - 324$ می‌شود.

۳۰- گزینه «ج» درست است.

طبق استدلال سؤال قبلی، برای برقرار بودن این شرط، هرنفر توسط حداقل یک نفر دیده شود. در حالـت گـرافی این شرط به معنی این است که گراف باید به چند دور تقسیم شود.

برای این منظور دو حالت وجود دارد: یک دور ۵ رأسی که تعداد حالات برابر است با $24 = 4!$؛ یا یک دور ۳رأسی و یک دور ۲رأسی که تعداد حالات برابر است با $20 = 2 \times \binom{5}{3}$ (۳رأس دور انتخاب و جهت چرخش یال های این مثلث هم دو حالت دارد).

جواب مسأله مجموع جواب‌های این حالت یعنی $44 = 24 + 20$ است.

۳۱- گزینه «د» درست است.

مرتضی هیچگاه نمی‌تواند بفهمد که فرد دیده شده دروغ می‌گوید یا فرد بیننده. (اگر دروغگو کمی ماهر باشد!) در واقع از آن جا که پاسـخ الف علی و پاسخ ب‌ی امین باید عملاً به یک شخص اشاره کنند، اگر این دو پاسخ با هم متفاوت باشند مرتضی می‌تواند بفهمد یکی‌شان دارد دروغ می‌گوید، اما نمی‌تواند بفهمند کدام‌شان راست و کدامشان دروغ می گوید.

از سوی دیگر، اگر شخصی توسط هیچ شخص دیگری دیده نشود، ممکن نیست بفهمیم راست می گوید یا دروغ، چون پاسخ الفش در پاسخ ب‌ی هیچ کس دیگری یافت نمی‌شود و شخص آزاد است هر کسی را می‌خواهد دروغ بگوید و مرتضی هم نفهمد!

پس می‌توان دید که هرگز مرتضی نمی‌تواند در این سیستم دروغگو را بیابد و جواب درست «هیچ گزاره‌ای درست نیست» می‌باشد.

۳۲- گزینه «الف» درست است.

طول گام‌های کامبیز توان‌های ۲ هست و این توانها در تقسیم بر عدد ۳، باقی‌مانده‌ی ۱ یا ۲ دارنـــد. با کمـــی دقـت می‌تـــوان دید که باقیمانده‌ی تقسیم بر ۳ی گام‌های متوالی کامبیز دقیقاً به صورت ۱ و بعد ۲ و بعد ۱ و بعد ۲ و . . . . است! (چرا؟)

در واقع کامبیز بعد از برداشتن اولین گام و حضور در خانه‌ی ۱، به صورت دقیقاً یکی در میان در خانه‌های $3k$ و $3k + 1$ خواهد بود و هرگز امکان ورود به خانه‌های $3k + 2$ (خانه‌هایی که در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۲ دارند) را ندارد.

از طرف دیگر با برداشتن گام‌هایی به طول ۱ و بعد ۲ و بعد ۱ و بعد ۲ و ... کامبیز می‌تواند به تمام خانه‌های به صورت $3k$ و $3k + 1$ برسد.

پس در صورتی که در تقسیم شماره‌ی یک خانه بر عدد ۳ باقی مانده برابر ۲ بشود آن خانه »بد» و در غیر این صورت «خوب» است. این گزاره تنها در مورد گزینه « ۱۳۹۰ یک خانه‌ی خوب و ۲۰۱۲ یک خانه‌ی بد است.» صادق است.

۳۳- گزینه «ج» درست است.

اعداد دنباله به صورت زیر می‌باشند: $(3\times1-1\times3),(1\times3,2-2\times3),(2\times3,2-3\times3),(3\times3,2-3\times3),\ldots$ پس کافیست ۲۰۱۲ را تقسیم بر ۲ کنیم و ببینیم ۲۰۱۲ امین عدد به عنوان عضو دوم ۱۰۰۶ امین زوج دوتایی ظاهر می‌شود. این عدد هم برابر است با: $3\times1006=3018$

۳۴- گزینه «ب» درست است.

اگر L_i را برابر طول رشته S_i، N_i را برابر تعداد حروف بزرگ در S_i و n_i را برابر تعداد حروف کوچک در S_i تعریف کنیم، روابط زیر برقرار هستند.

$$\begin{aligned}L_i &= n_i + N_i\\ N_i &= 2\times N_{i-1}\\ n_i &= n_{i-1} + N_{i-1}\end{aligned}$$

با صریح‌سازی این فرمول‌ها به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}N_i &= 2^i \times N_0 = 3\times 2^i\\ n_i &= 1 + 3\times 2^i\\ L_i &= 1 + 6\times 2^i\end{aligned}$$

از این رو، طول رشته هفتم برابر با $L_7 = 1 + 6\times 2^7 = 769$ می‌باشد که از ۷۷۷ کمتر بوده و گزینه آخر درست است.

۳۵- گزینه «ه» درست است.

اگر تمامی حروفی که از اولین A (دومین حرف از سمت چپ) در S_0 ساخته می شوند را قرمز کنیم (هم حروف ساخته‌شده به صورت مستقیم در S_1 و هم در ادامه حروفی که از این حروف قرمز ساخته می شوند)، خواهیم دید که در S_9 ابتدا یک a مشکی داریم که از ابتدا دست نخورده مانده است، سپس ۱۰۲۳ حرف قرمز بزرگ یا کوچک داریم (چرا؟)، پس از آن یک مشکی (دست نخورده از ابتدا) و پس از آن حروفی می آیند که از B موجود در S_0 ساخته شده اند.

با این وصف مسئله تبدیل می‌شود به این که $2=1027-1-1023-1$اُمین حرف از سمت چپ رشته‌ای که از B پس از ۹ مرحله ساخته را بیابیم. در روشی مشابه، این بار حروفی که از این B ی موجود در S_0 به صورت مستقیم یا غیر مستقیم ساخته می‌شومد را آبی می‌کنیم. اکنون کافی‌ست دومین حرف آبی در S_9 را بیابیم.

اگر دقت کنیم در اولین مرحله اجرای قاعده، رشته آبی با ...Ab شروع (در S_1)؛ همین قسمت در S_2 رشته‌ای به صورت ...Ba را می‌سازد. با همین رویه می‌توانیم ببینیم رشته‌ی آبی در S_9 با ...Ab شروع می‌شود و در نتیجه دومین حرف آبی و ۱۰۲۷ اُمین حرف کل رشته‌ی S_9 برابر با b است.